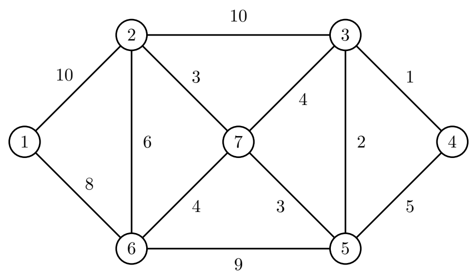
Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2025
von Luxburg/Bordt

Übungsblatt 8

Abgabe am 15.12.2025

Aufgabe 1: Minimale Spannbäume (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei folgender Graph G:



a) Führen Sie Kruskal's Algorithmus aus, um einen minimalen Spannbaum für G zu bestimmen. Geben Sie dessen Kanten in der Reihenfolge ihrer Hinzufügung an.

b) Nutzen Sie in (a) die Union-Find-Datenstruktur. Beim Sortieren der Kanten gehen Sie im Falle von Kanten $e_1 = (A_1, B_1)$ und $e_2 = (A_2, B_2)$ mit gleichem Gewicht so vor, dass e_1 vor e_2 gereiht wird, genau dann wenn $A_1 + B_1 < A_2 + B_2$ (z.B. haben die Kanten $(3, 7)$ und $(6, 7)$ beide Gewicht 4, wegen $3 + 7 < 6 + 7$ wird $(3, 7)$ vor $(6, 7)$ gereiht; dieses Vorgehen liefert für den gegebenen Graphen eine eindeutige Sortierung der Kanten). Geben Sie in jedem Durchlauf der for-Schleife die betrachtete Kante und den sich daraus ergebenden Teil des Spannbaums (d.h. die Menge A) sowie die Partition der Knotenmenge an.

c) Führen Sie Prim's Algorithmus gestartet an $\{1\}$ aus, um einen minimalen Spannbaum für G zu bestimmen. Geben Sie die Kanten in der Reihenfolge ihrer Hinzufügung an.

Aufgabe 2: Veränderte Gewichte (3 Punkte)

Bei kürzesten Wegen haben wir gesehen, dass man die Gewichte der Kanten nicht verändern darf. Bei Spannbäumen ist dies aber anders. Beweisen Sie, dass sich der minimale Spannbaum nicht verändert, wenn man

1. Alle Gewichte mit einer positiven Konstante multipliziert.
2. Auf alle Gewichte eine positive Konstante addiert.

Aufgabe 3: Maximaler Spannbaum (3 Punkte)

Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus zum finden des maximalen Spannbaums. Ein maximaler Spannbaum ist ein Spannbaum mit maximalem Kantengewicht. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Aufgabe 4: Eine neue Kante (3 Punkte)

Gegeben sei ein gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit positiven Kantengewichten sowie ein minimaler Spannbaum für G, der mit Kruskals Algorithmus bestimmt wurde. Nun fügen wir dem Graphen eine neue gewichtete Kante hinzu. Sei also $e_{\text{neu}} = (v_i, v_j)$ mit Gewicht $w_{\text{neu}} > 0$ eine neue Kante für den Graphen G. Entwickeln Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $O(|V|)$, der einen minimaler

Spannbaum für den Graphen mit der zusätzlichen neuen Kante findet. Begründen Sie die Korrektheit des Algorithmus.

Hinweis: Bei der Begründung der Korrektheit können Sie annehmen, dass der ursprüngliche MST mit Kruskals Algorithmus berechnet wurde.

Aufgabe 5: Wasserversorgung in Algorithmingen (5 Punkte)

Algorithmingen ist eine Stadt mit N Häusern. Jedes dieser Häuser soll nun mit fließendem Wasser versorgt werden. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten. (1) Wir bauen einen Brunnen. Die Kosten einen Brunnen zu bauen hängen vom Haus ab, bei Haus Nummer i betragen sie $B_i > 0$. (2) Wir verbinden das Haus über (möglicherweise mehrere) Wasserleitungen mit einem Haus mit Brunnen. Das Bauen einer Wasserleitung zwischen den Häusern i und j kostet $W_{i,j} > 0$. Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus der die günstigste Möglichkeit findet ganz Algorithmingen mit Wasser zu versorgen. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass das Wasser in beide Richtungen einer Leitung fließt. Sie werden jedoch sehen, dass diese Annahme nicht notwendig ist.