

Übungsblatt 3

Abgabe bis 3.11.2025 auf Ilias.

Bitte nennen Sie die Abgabe “Blatt3-[Ihr Name].pdf”

Aufgabe 1: Stacks und Queues (2+1+4 Punkte)

Angenommen Sie möchten eine Queue-Datenstruktur mit den üblichen Funktionen ENQUEUE($\cdot$) und DEQUEUE($\cdot$) bereitstellen, wozu Ihnen “intern” allerdings nur *genau 2 Stacks* zur Verfügung stehen (also keine Arrays, Listen, oder anderes).

- Wie kann die Queue-Datenstruktur mittels der beiden Stacks implementiert werden? Beschreiben Sie eine Implementierung in Worten und in Pseudocode. In dieser Teilaufgabe genügt eine “naive” Implementierung. Sie müssen also nicht versuchen die Laufzeit zu optimieren.
- Was können Sie über die worst-case-Laufzeit für eine ENQUEUE($\cdot$)- bzw. DEQUEUE($\cdot$)-Operation Ihrer Implementierung sagen?
- Nun wollen wir eine effiziente Implementierung finden. Dabei betrachten wir die *amortisierte Laufzeit*. Bei der amortisierten Laufzeit betrachtet man die Laufzeit mehrerer Operationen gemeinsam:
 - Betrachten Sie eine beliebige Folge von insgesamt n_E ENQUEUE($\cdot$) und insgesamt n_D DEQUEUE($\cdot$)-Operationen mit $n_E + n_D = n$.
 - Berechnen Sie die worst-case-Laufzeit T_n für diese Folge von Operationen in Abhängigkeit von der Anzahl der Operationen n .
 - Dann heißt T_n/n die *amortisierte Laufzeit* dieser Operationen.

Falls nicht bereits geschehen, finden Sie eine Implementierung einer Queue, die wie oben nur zwei Stacks benutzt und amortisierte Laufzeit $\mathcal{O}(1)$ hat. Begründen Sie Ihre Antwort. Tipp: Betrachten Sie, welche Stack-Operationen ein Element v im schlimmsten Fall mit ENQUEUE($\cdot$)- bzw. DEQUEUE($\cdot$) durchläuft.

Aufgabe 2: k -närer Heap (2+2+2+1+2 Punkte)

In dieser Aufgabe benötige die HEAPIFY-Operation an der Wurzel eines Array-basierten k -nären Heaps mit n Elementen im worst-case $\lceil k \log_k(n) \rceil$ Schritte. Dabei sind auf jedem seiner $\lceil \log_k(n) \rceil$ vielen Level zusätzlich k Schritte zum Finden (und ggf. Vertauschen) des Maximums der k Kinder des aktuellen Knotens bereits berücksichtigt. Welche Wahl von $k \in \mathbb{N}$ minimiert diesen Ausdruck? Diese Frage wollen wir in dieser Aufgabe beantworten.

- Bestimmen Sie zunächst das Minimum der Funktion $f(x) = x \log_x(n)$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>1}$ für festes, aber beliebiges n . Tipp: Basiswechsel im Logarithmus und Kurvendiskussion
- Nutzen Sie einen Plot von $f(x)$ aus (a) oder die Einsichten aus (a), um die beste Wahl $k^* \in \mathbb{N}$ zu ermitteln. Wie viele Schritte benötigt diese im worst-case bei Heap-Größe $n = 10^\ell$ für $\ell \in \{1, \dots, 9\}$? Vergleichen Sie dies mit dem Fall $k = 2$.
- Wie wirkt es sich auf die Gesamtlaufzeit von HEAPIFY aus, wenn jeder Knoten seine (bis zu k vielen) Kinder in einem separaten binären Max-Heap verwaltet? Bestimmen Sie hierfür insbesondere die notwendige Anzahl Schritte zum Finden (und. ggf. Austauschen) des Maximums der k Kinder des aktuellen Knotens.
- Führen Sie auf dem binären Heap $B = \boxed{9} \boxed{8} \boxed{6} \boxed{7} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{2}$ und dem ternären Heap $T = \boxed{9} \boxed{7} \boxed{5} \boxed{8} \boxed{3} \boxed{6} \boxed{2}$ jeweils die Operation DECREASE($9 \mapsto 1$) aus. Wie viele Vertauschungen wurden jeweils durchgeführt?

- e) Wir bezeichnen ein Array A mit paarweise unterschiedlichen Einträgen als 2/3-kompatibel, wenn sowohl der jeweils per Level-Order definierte binäre Heap H_2 als auch der ternäre Heap H_3 beide die Max-Heap-Eigenschaft erfüllen (zu Level-Order siehe Blatt 2, Aufgabe 3). Überdenken Sie folgende Aussage: *“Für alle 2/3-kompatiblen Arrays gilt: In H_3 benötigt keine DECREASE-Operation auf der Wurzel mehr Vertauschungen als dieselbe DECREASE-Operation auf der Wurzel in H_2 ”*. Stimmt das? Beweisen oder widerlegen Sie!

Aufgabe 3: Leetcode Min Stack (online, keine Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe “155. Min Stack” auf LeetCode. LeetCode ist eine beliebte Online-Plattform zum Lösen von Coding-Aufgaben. Wir verlinken in unseren Übungsblättern dieses Jahr gelegentlich LeetCode Aufgaben die inhaltlich zur Vorlesung passen. So können Sie ein bisschen praktische Erfahrung im Implementieren von Algorithmen sammeln! Die von uns verlinkten Aufgaben können mit einem kostenlosen Account bearbeitet werden.

Link zur Aufgabe: <https://leetcode.com/problems/min-stack/>