Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2025
von Luxburg/Bordt

Übungsblatt 12

Abgabe am 02.02.2026

Aufgabe 1: Fibonacci (2+2+2 Punkte)

Betrachten Sie erneut die Fibonacci-Zahlen ($F_0 := 0, F_1 := 1, F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$), und deren direkte Umsetzung als rekursiver Programmcode:

```
function FIB(n)
    if n ≤ 1 then
        return n
    else
        return FIB(n − 1) + FIB(n − 2)
    end if
end function
```

a) Warum ist diese Umsetzung extrem ineffizient? Zeigen Sie, dass sie $\Omega(2^{n/2})$ viele Additionen benötigt.

b) Geben Sie Pseudocode an, um die Fibonacci Zahlen mittels dynamischer Programmierung ("Bottom-Up") zu berechnen. Wieviele Additionen werden nun berechnet?

c) Wie (b), nun aber mittels "Top-Down".

Aufgabe 2: Positive Folgen (4 + 3 Punkte)

Gegeben sei eine endliche Folge positiver Zahlen $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Das Gewicht einer Teilfolge sei die Summer ihrer Einträge. Wir suchen das maximale Gewicht einer Teilfolge a' mit nicht-benachbarten Einträgen, das heißt a' kann a_i oder a_{i+1} enthalten, aber nicht beide Elemente gleichzeitig.

a) Geben Sie den Pseudo-Code eines Algorithmus an, der dieses maximale Gewicht in Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ berechnet, und begründen Sie seine Korrektheit.

b) Adaptieren Sie Ihren Algorithmus aus (a), sodass er zusätzlich eine entsprechende Teilfolge mit maximalem Gewicht ausgibt. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Adaption.

Aufgabe 3: Polynomielle Reduktion (2+2+2+1 Punkte)

Zwei wichtige Graphprobleme sind:

- **VERTEX COVER**: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Knotenüberdeckung der Größe höchstens k? (Eine Knotenüberdeckung ist eine Teilmenge $S \subseteq V$, sodass jede Kante in E mindestens einen Endpunkt in S hat.)
- **INDEPENDENT SET**: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Enthält G eine unabhängige Menge der Größe k? (Eine unabhängige Menge ist eine Teilmenge von Knoten, bei der *kein* Paar durch eine Kante verbunden ist.)

a) Betrachten Sie den Graphen G mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $E = \big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\big\}$. Geben Sie eine minimale Knotenüberdeckung und eine maximale unabhängige Menge an.

b) Beweisen Sie: Eine Menge $S \subseteq V$ ist genau dann eine Knotenüberdeckung in G, wenn $V \setminus S$ eine unabhängige Menge in G ist.

c) Beschreiben Sie mithilfe von (b) eine polynomielle Reduktion von INDEPENDENT SET auf VERTEX COVER. Zeigen Sie also, wie man jede Instanz (G, k) von INDEPENDENT SET in eine Instanz (G', k') von VERTEX COVER transformieren kann, sodass beide dieselbe Antwort haben.

d) Angenommen, VERTEX COVER ist NP-vollständig. Was folgt daraus für INDEPENDENT SET?