Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2025
von Luxburg/Bordt

Übungsblatt 1

13. Oktober 2025

Die Abgabe des Blattes erfolgt bis **Montag 12 Uhr** der Folgewoche auf Ilias.

Aufgabe 1: Landau-Notation (4+3 Punkte)

Die folgenden 14 Funktionen $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ stehen in keiner speziellen Reihenfolge:

$$2^n,\quad n^{0.01},\quad \log n,\quad \log(n^3),\quad n\log n,\quad n^n,\quad 1,\quad \log\log n,\quad \sqrt{n},\quad 1/n,\quad n!,\quad \log(n^{\log n}),\quad 8^n,\quad n^8$$

a) Sortieren Sie obige Funktionen in asymptotisch aufsteigender Reihenfolge und begründen Sie kurz jede aufeinanderfolgende Paarung. Nutzen Sie die Schreibweise $f_1 \prec f_2$ für $f_1 \in o(f_2)$ und $f_1 \asymp f_2$ für $f_1 \in \Theta(f_2)$, also beispielsweise $f_1 \prec f_2 \asymp f_3 \prec f_4 \prec \ldots \prec f_{12} \asymp f_{13} \prec f_{14}$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie.

(i) Für beliebige $b > 1$ gilt: $\log_b(n) \in \Theta(\log_2 n)$.

(ii) $f \in \mathcal{O}(g) \;\Rightarrow\; g \in \omega(f)$.

(iii) Für $f_c(n) := \sum_{i=0}^{n} c^i$ und positives reelles c gilt: $f_c(n) \in \Theta(n) \Leftrightarrow c = 1$.

Aufgabe 2: Laufzeitanalyse I (3 Punkte)

Geben Sie scharfe asymptotische Schranken (d.h. von der Form $\Theta(\cdot)$) für die Laufzeit folgender Code-Fragmente in Abhängigkeit von n an. Gehen Sie davon aus, dass alle Zuweisungs- und Vergleichsoperationen konstante Zeit benötigen.

```
for i = 0 to n do
    for j = n downto i do
        sum ← sum + j
    end for
end for
```

```
i ← 1
while i · i < n do
    sum ← sum + 2
    i ← i + 1
end while
```

```
for i = 1 to n do
    j ← n
    while j > 1 do
        sum ← sum + i
        j ← j/2
    end while
end for
```

Aufgabe 3: Fibonacci I (2+2 Punkte)

Die Fibonacci-Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ist durch folgende Rekursion definiert:

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_n := F_{n-1} + F_{n-2}.$$

In dieser Aufgabe zeigen wir das exponentielle Wachstum dieser Folge.

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass $F_n \geq 2^{0.5n}$ für alle $n \geq 6$.

(b) Finden Sie ein $c < 1$ so, dass $F_n \leq 2^{cn}$ für alle $n \geq 0$ ist, und beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Fibonacci II (2+2+2 Punkte)

Eine alternative Berechnung der Fibonacci-Folge ist mittels 2×2 Matrizen möglich. Überzeugen Sie sich, dass gilt:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} \quad \text{, sowie} \quad \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt allgemein, dass

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}. \tag{$\star$}$$

Zur Berechnung von F_n muss im Wesentlichen also "lediglich" $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n$ berechnet werden.

(a) Beweisen Sie ($\star$) für $n \geq 0$. (Tipp: vollständige Induktion).

(b) Sei X Element irgendeines Ringes (z.B. eine Matrix, oder eine Zahl). Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}(\log n)$ Multiplikationen ausreichen um X^n zu berechnen. (Tipp: Wie lässt sich z.B. X^{64} effizienter berechnen, als mittels $X \cdot X \cdot X \cdot \ldots \cdot X$?)

(c) Die Addition zweier ℓ-Bit-Zahlen benötigt Zeit $\mathcal{O}(\ell)$, deren Multiplikation mittels geschickter Verfahren jedoch Zeit $\mathcal{O}(\ell^{1.59})$. Zeigen Sie, dass das Matrizen-Verfahren ($\star$) zur Berechnung von F_n asymptotisch echt schneller als das in der Vorlesung mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$ vorgestellte Verfahren ist. (Tipp: Bestimmen Sie die Gesamtzahl benötigter skalarer Rechenoperationen und deren Bitlängen.)

Bonusaufgabe 1 (3 Punkte) Einem Apotheker ist in eine Menge von 99 Pillen eines Medikamentes eine Pille eines starken Giftes geraten, die sich nur durch ein höheres Gewicht von den anderen unterscheidet. Mit wie vielen Wägungen auf einer Balkenwaage kann diese Pille identifiziert werden? Verallgemeinern Sie ihre Methode für eine Gesamtmenge von n Pillen.