Präsenzübung 4

Besprechung: 12.11.18 – 16.11.18

Aufgabe 1: Kürzeste Pfade und Kürzeste-Pfad-Metrik (mündlich, keine Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit positiven Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$ und $p := (v_0, \dots, v_k)$ ein kürzester Pfad von $a := v_0$ nach $b := v_k$.

a) Beweisen Sie, dass alle Teilpfade von p ebenfalls kürzeste Pfade sind.

b) Angenommen q sei zudem ein kürzester Pfad von b nach c. Ist dann die Hintereinanderausführung von p und q ein kürzester Pfad von a nach c?

c) Beweisen Sie, dass die Kürzeste-Pfad-Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d(a, b) = \min\{\mathit{Länge}(p) : p \text{ ist ein Pfad von } a \text{ nach } b\}$ eine Metrik darstellt, d.h. folgende definierende Eigenschaften erfüllt:

(i) $d(a, b) \geq 0$ und $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (positive Definitheit),

(ii) $d(a, b) = d(b, a)$ (Symmetrie),

(iii) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (Dreiecksungleichung).

Aufgabe 2: Metriken (mündlich, keine Punkte)

Welche der folgenden Funktionen $d_i : V \times V \to \mathbb{R}$ sind eine Metrik für alle zusammenhängenden, ungerichteten, ungewichteten Graphen? Beweisen oder widerlegen Sie anhand der drei Eigenschaften einer Metrik.

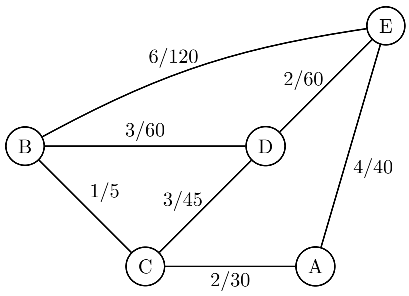
a) $d_1(a, b) := \min\{\ell(p) \mid p \text{ ist ein Pfad von } a \text{ nach } b\}$

b) $d_2(a, b) := |\{p \mid \ell(p) = d_1(a, b)\}|$

c) $d_3(a, b) := \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & \text{else} \end{cases}$

Darin bezeichnet $\ell(p)$ die Anzahl Kanten des Pfades p.

$G_1 :=$



Aufgabe 3: Dijkstra-Algorithmus (mündlich, keine Punkte)

Betrachten Sie die “Straßenkarte” G_1. Jeder Straßenabschnitt ist mit zwei Werten ℓ/v gelabelt: Seiner Länge ℓ in km und der darauf erreichbaren Durchschnittsgeschwindigkeit v in km/h.

a) Bestimmen Sie alle von A ausgehenden *kürzesten* Wege durch Anwendung des Djikstra-Algorithmus mit Min-Priority-Queue. Geben Sie zum Zeitpunkt jeder Ausführung von Zeile 3 des in der Vorlesung gegebenen Algorithmus tabellarisch die Werte $v.dist$ und $v.\pi$ für alle Knoten v an.

b) Stellen Sie anschließend die Vorgängermatrix von G für alle kürzesten Wege auf.

c) Bestimmen Sie ebenso alle von A ausgehenden *schnellsten* Wege.

d) Wie lautet jeweils der schnellste/kürzeste Weg von A nach B ?

Aufgabe 4: Vorgängermatrix (mündlich, keine Punkte)
Gegeben sei folgende Vorgängermatrix für einen Graphen G:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie anhand der Vorgängermatrix den kürzesten Weg von Knoten 3 nach Knoten 5.