Lösungen von Übungsblatt 4

Algorithmen (WS 2018, Ulrike von Luxburg)

Lösungen zu Aufgabe 1

a) *Induktionsanfang* $k = 0$: Es ist $A^0 = I$ die Einheitsmatrix, welche offensichtlich keinen Pfad der Länge 0 für $i \neq j$ sowie genau einen für $i = j$ liefert.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$, dass $A^k[i, j]$ der Anzahl Pfade der Länge k von i nach j entspricht.

Induktionsschritt $k \mapsto k + 1$: Es ist

$$A^{k+1}[i, j] = (A^k \cdot A)[i, j] = \sum_{v=1}^{n} A^k[i, v]A[v, j], \tag{1}$$

wobei nach Induktionsvoraussetzung $A^k[i, v]$ der Anzahl Pfade der Länge k von i nach v entspricht. Außerdem ist $A[v, j]$ gleich 1 genau dann, wenn eine Kante von v nach j existiert, sonst 0. Daher summiert obiger Ausdruck $A^{k+1}[i, j]$ über alle möglichen Pfade der Länge $k + 1$ von i über einen Knoten v (mit $v \sim j$ bzw. $v \to j$) nach j auf und liefert somit deren Anzahl.

b) Berechne A^k (effizienterweise etwa mittels "Square-And-Multiply") und liefere *true* als Ausgabe genau dann, wenn $A^k[i, j]$ ungleich 0 ist. In (a) wurde gezeigt, dass genau dann ein Pfad von i nach j der Länge genau k existiert.

c) Setze zunächst jeden Eintrag der Hauptdiagonalen von A auf 1 (füge also jedem Knoten eine Schleife hinzu). Betrachtet man nun in der Summe in (1) den Fall $v = j$, so erkennt man, dass $A^k[i, j] > 0 \Rightarrow A^{k+1}[i, j] > 0$ und damit allgemeiner $A^s[i, j] > 0 \Rightarrow A^t[i, j] > 0$ für alle $s \leq t$ gilt. Daher ist nun $A^k[i, j]$ ungleich 0 genau dann, wenn ein Pfad von i nach j der Länge k oder kürzer existiert (streng genommen müsste man das nun wieder mittels Induktion zeigen).

Lösungen zu Aufgabe 2

a) Richtig. Beweis per Widerspruch: Angenommen kürzester Pfad $v_0 v_1 \dots v_k$ enthält $v_i = v_j$ für $0 \leq i < j \leq k$. Dann wäre $v_0 \dots v_i = v_j \dots v_k$ ein kürzerer Pfad von v_0 nach v_k, in welchem der Pfadabschnitt zwischen v_i und v_j ausgelassen wird.

b) Richtig. Ein kürzester Pfad besucht gemäß (a) jeden der n Knoten höchstens einmal und hat daher Länge $\leq n - 1$. Damit gilt auch $diam(G) \leq n - 1$.

Anmerkung: Ein Durchmesser von $n - 1$ wird im Pfadgraphen auf n Knoten erreicht.

c) Falsch. Falls G nicht zusammenhängend ist, so ist G kein Baum sondern ein Wald.

d) Richtig. Wähle $e = (u, v)$. Da G zusammenhängend und kreisfrei ist, gibt es genau einen Weg zwischen u und v (sonst hätte G einen Kreis). Da $e \notin E$, fügen wir einen neuen (direkten) Weg zwischen u und v ein, d.h. nun gibt es einen Kreis. Da G vorher kreisfrei war, muss die Kante $e = (u, v)$ in allen Kreisen von G' enthalten sein, aber wie schon gesagt, gibt es nur genau einen anderen Weg zwischen u und v, somit gibt es nur genau einen Kreis.

e) Falsch. Der Grad eines Knotens zählt die inzidenten Kanten. Da wir über alle Knoten summieren, trägt jede Kante zweifach zur Summe $\sum_{i \in V} d_i$ bei, daher gilt $\sum_{i \in V} d_i = 2m$. Diese Aussage ist auch als Handschlagslemma bekannt, genauso wie die folgende Aufgabe.

f) Richtig. Betrachte die Summe aller Knotengrade $\sum_{i \in V} d_i = 2m$ - sie ist gerade. Es gilt

$$2|E| = \sum_{v: d_v \text{ gerade}} d_v + \sum_{v: d_v \text{ ungerade}} d_v.$$

Wir subtrahieren die Summer der gerade Grade:

$$\sum_{v: d_v \text{ ungerade}} d_v = 2|E| - \sum_{v: d_v \text{ gerade}} d_v.$$

Auf der rechten Seite sind nur gerade Zahlen, also ist die rechte Seite insgesamt gerade. Dementsprechend ist die linke Seite gerade. Da jeder Summand in der linken Seite ungerade ist, muss die Anzahl der Summanden wiederum gerade sein.

g) Richtig. Offensichtlich führt ein längster kürzester Pfad von einem tiefsten Blatt über die Wurzel wieder zu einem tiefsten Blatt im anderen Halbbaum, hat also Länge

$$2 \cdot \text{Höhe von G} \leq 2\lceil \log_k n \rceil.$$

h) Falsch. Ein einfaches Dreieck $V = \{a, b, c\}$, $E = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ ist ein Gegenbeispiel.

i) Richtig. Wir beweisen dies durch Widerspruch. Sei G nicht zusammenhängend, dann gibt es 2 nicht-leere Mengen V_0 und V_1 (nicht zwingend zusammenhängend), zwischen denen es keine Kante gibt, und es gilt: $V = V_0 \cup V_1$. Da $n = |V| = |V_0| + |V_1|$ gilt entweder $|V_0| \leq \frac{n}{2}$ oder $|V_1| \leq \frac{n}{2}$. Sagen wir, dass $|V_0| \leq \frac{n}{2}$. Ein Knoten $v \in V_0$, der wie alle anderen $d_v \geq \frac{n}{2}$ hat, ist nur mit Knoten in V_0 aber nicht mit sich selbst verbunden, d.h. $d_v < \frac{n}{2}$. Dies ist ein Widerspruch.

Lösungen zu Aufgabe 3

a) Um das Problem als Graphproblem zu modellieren, stellen wir jeden möglichen Zustand als Paar (A, B) dar, wobei A die Menge im 7 Liter Behälter und B die Menge im 4 Liter Behälter bezeichnet. Also wäre der Startzustand dann $(7, 4)$. Eine Variable für den 10 Liter Behälter ist nicht notwendig, da die Gesamtmenge immer 11 Liter bleibt und A und B die Menge im 10 Liter Behälter vollständig beschreiben. Alle Kombinationen von $0 \leq A \leq 7$ und $0 \leq B \leq 4$ sind möglich (außer $A = 0$ und $B = 0$), d.h. es gibt $5 \cdot 8 - 1 = 39$ mögliche Zustände. Diese Zustände definieren wir als die Knoten in unserem Graphen. Wir fügen gerichtete Kanten zwischen zwei Zustände ein, wenn man mit einer erlaubten Umfüllung von einem zum anderen Zustand gelangen kann. Erlaubte Umfüllungen sind Umfüllungen "in einem Guss", d.h. entweder ist der Zielbehälter voll oder der Ursprungsbehälter leer. Beispielsweise gibt es eine Kante zwischen $(7, 4)$ und $(0, 4)$, aber nicht zwischen $(7, 4)$ und $(6, 4)$. Das heißt, ein Pfad zwischen zwei Zuständen stellt dar, wie man durch Umfüllungen den Zielzustand erreichen kann.

Die Frage, die für diesen Graphen beantwortet werden muss, ist, ob es einen Pfad zwischen $(7, 4)$ und $(x, 2)$ oder $(2, y)$ gibt. Falls es keinen Pfad gibt, ist es nicht möglich durch Umfüllungen, in den gewünschten Zustand zu kommen.

b) Wir lassen einmal DFS oder BFS am Knoten $(7, 4)$ laufen und schauen, ob wir einen der gewünschten Knoten erreichen können.

c) Eine Lösung wäre (7/7,4/4,0/10) - (7/7, 0/4, 4/10) - (1/7, 0/4, 10/10) - (1/7, 4/4, 6/10), (5/7, 0/4, 6/10) - (5/7, 4/4, 2/10) - (7/7, 2/4, 2/10)

Lösungen zu Aufgabe 4

Folgendes Vorgehen, das wir in mehrere Schritte unterteilen, zeigt, dass $n - 1$ Überweisungen ausreichen und dabei keine Person mehr als eine Überweisung tätigen muss:

1. Konstruiere einen Graphen G mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$ und einer gerichteten Kante von i nach j mit Kantengewicht a_{ij}, falls Person i einen Betrag a_{ij} an Person j zahlen muss.
2. Sei $Z = \{z_1, \ldots, z_A\}$ die Menge aller Zyklen in G. Entferne diese der Reihe nach wie folgt:
   - Bezeichne mit w das minimale Kantengewicht im Zyklus.
   - Subtrahiere w von allen Kantengewichten der Kanten im Zyklus. Bemerke, dass wir dadurch die Differenz aus Eingangs- und Ausgangsgrad eines Knoten nicht verändern; die Differenz zwischen dem, was eine Person insgesamt erhält und was sie insgesamt ausgeben muss, bleibt also gleich.
   - Entferne alle Kanten mit Gewicht 0. Da wir dadurch mindestens eine Kante im Zyklus entfernen, haben wir den Zyklus entfernt.

Beachte, dass wir bei diesem Vorgehen stets nur Kanten entfernen und nicht hinzufügen. Es enstehen also keine neuen Zyklen, sondern Schritt für Schritt wird ein Zyklus entfernt, sodass der Graph am Ende zyklenfrei ist.

3. Sortiere den Graphen topologisch. Wir erhalten also eine Anordnung $\pi_1\ \pi_2\ \ldots\ \pi_n$ der Knoten $\{1, \ldots, n\}$, sodass es keine Kante von π_l nach π_m für $m \leq l$ gibt. Falls ein Knoten π_l nicht mit seinem Nachfolger π_{l+1} verbunden ist, füge eine Kante mit Gewicht 0 von π_l nach π_{l+1} ein.

4. Falls es eine Kante von π_l nach π_m für $m > l + 1$ gibt, so entferne diese und addiere dafür ihr Kantengewicht zu jeder der Kanten

$$\pi_l \text{ nach } \pi_{l+1}, \quad \pi_{l+1} \text{ nach } \pi_{l+2}, \quad \ldots, \quad \pi_{m-1} \text{ nach } \pi_m.$$

   Wieder wird dadurch die Differenz aus Eingangs- und Ausgangsgrad eines Knoten nicht verändert.

5. Wenn nach dem 4. Schritt jene Person, die zum Knoten π_l (für $1 \leq l \leq n - 1$) gehört, das Gewicht der Kante von π_l nach π_{l+1} an jene Person, die zum Knoten π_{l+1} gehört, überweist, sind alle Schulden beglichen.