Übungsblatt 10

Abgabe am 14.01.2019

Aufgabe 1: Greedy-Algorithmen I (5 Punkte)

Aus der Vorlesung kennen Sie das gewichtete Rucksackproblem. Beim ungewichteten Rucksackproblem sind die $w_i = v_i$, das heißt jeder Gegenstand ist genau sein Gewicht wert.
Ein Greedy-Algorithmus für das ungewichtete Rucksackproblem wäre, iterativ das jeweils größtmögliche Element in den Rucksack einzufügen, solange noch Platz ist. Dabei ist $w(g) = v(g)$ das Gewicht und der Wert eines Gegenstands g. G_{opt} ist die optimale Lösung des Problems, W das maximal erlaubte Gewicht und $\{g_1, \ldots, g_n\}$ sind die möglichen Gegenstände.

Algorithm 1 Greedyalgorithmus für das ungewichete Rucksackproblem

```
G ← {g_1, ... g_n}
G' ← {}
while G ≠ ∅ do
    g ← max_{w(g)}(G)
    if w(g) ≤ W then
        G' ← G' ∪ {g}
        W ← W − w(g)
    end if
    G ← G\{g}
end while
return G'
```

Zeigen Sie, dass für die Ausgabe G' des Algorithmus gilt:

$$\sum_{g \in G'} w(g) \geq \frac{1}{2} \sum_{g \in G_{\text{opt}}} w(g),$$

wobei G_{opt} die optimale Lösung des Problems ist.

Aufgabe 2: Greedy-Algorithmen II (2+3 Punkte)

Gegeben seien zwei Mengen A und R, die beide je n paarweise voneinander verschiedene natürliche Zahlen enthalten. Sie können die Elemente in A und R in eine beliebige Reihenfolge bringen, sodass a_i das i-te Element in A und r_i das i-te Element in R ist. Es sei $P = \prod_{i=1}^{n} a_i^{r_i}$.

a) Beschreiben Sie eine Greedy-Strategie, die versucht den Wert P zu maximieren.

b) Findet Ihre Strategie tatsächlich stets den maximalen Wert für P? Begründen Sie.

Aufgabe 3: Lokale Suche (5 Punkte)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Teilmenge von Knoten $S \subseteq V$. Das Problem des Multiway Cuts besteht darin, eine in ihrer Größe minimale Teilmenge der Kanten $E' \subseteq E$ zu finden, sodass keine zwei Knoten aus S in derselben Zusammenhangskomponente von $G - E'$ liegen ($G - E'$ ist jener Graph, der entsteht, wenn wir die Kanten E' aus G entfernen).

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der versucht das Problem des Multiway Cuts nach dem Prinzip der lokalen Suche zu lösen. Zur Erinnerung: Das Prinzip der lokalen Suche besteht darin, ausgehend von einer gegebenen Startlösung in jedem Schritt eine bessere Lösung in der Nachbarschaft der aktuellen Lösung zu finden. Tipp: Beginnen Sie mit dem leeren Graphen. Wie sieht nun eine "Nachbarschaft" aus, in der wir weiter suchen wollen? Beschreiben Sie lediglich die Eigenschaften einer solchen Nachbarschaft im Pseudo-Code und nicht, wie sie bestimmt wird. Verdeutlichen Sie schließlich das Prinzip der lokalen Suche im Pseudo-Code.

Aufgabe 4: Greedy-Algorithmus II (3+2 Punkte)

Betrachten Sie das Problem eines Getränkeautomaten, der das Wechselgeld von n Cent mit der kleinsten Anzahl an Münzen zurückgeben soll.

a) Betrachten Sie einen idealisierten Automaten, dem eine unendliche Menge an Wechselgeld, also an 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent Münzen, zur Verfügung steht. Geben Sie für diesen Fall einen Greedy–Algorithmus an und beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus immer die optimale Lösung findet.

b) Überlegen Sie sich nun einen zusätzlichen Münzwert, die Sie dem oben genannten Wechselgeld hinzufügen, so dass ein Greedy-Algorithmus nicht mehr in jedem Fall die optimale Lösung findet. Geben Sie auch einen solchen Fall an, in dem ein Greedy Algorithmus ein „falsches" Optimum findet.