

Übungsblatt 4

Abgabe am 12.11.2018

Auf dem nächsten Übungsblatt 5 wird es eine Programmieraufgabe in Java geben. Testen Sie doch jetzt schon einmal, ob Eclipse noch installiert ist und alles läuft. Im Moodle ist die Datei `Graph.java` bereitgestellt, die Sie als Test ausführen können.

Aufgabe 1: Adjazenzmatrix und Pfade (3 + 1 + 2 Punkte)

Sei A die $n \times n$ -Adjazenzmatrix eines beliebigen schleifenfreien und ungewichteten Graphen $G = (V, E)$, und bezeichne $A[i, j]$ den Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte.

- a) Beweisen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, dass $A^k[i, j]$ der Anzahl verschiedener Pfade der Länge k entspricht, die in G von i nach j führen.
- b) Nutzen Sie (a) für einen Algorithmus, der für alle Knotenpaare gleichzeitig ermittelt, ob diese jeweils mit einem Pfad der Länge *genau* k für ein $k \geq 0$ verbunden werden können.
- c) Modifizieren Sie die Eingabematrix ihres Algorithmus aus (b) so, dass er ermittelt, ob die jeweiligen Knotenpaare mit einem Pfad der Länge *höchstens* k verbunden werden können.

Aufgabe 2: Graphen (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Sei G ein schleifenfreier, ungerichteter und ungewichteter Graph mit $|V| = n$ Knoten und $|E| = m$ Kanten. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Jeder kürzeste Pfad in G ist immer einfach, d.h. kein Knoten wird mehrfach besucht.
- b) Ist G zusammenhängend, so gilt $\text{diam}(G) \leq n - 1$. Anmerkung: $\text{diam}(G)$ bezeichnet den Durchmesser von G ; dieser ist definiert als die maximale Länge irgendeines kürzesten Pfades in G .
- c) Wenn G keine Kreise enthält, so ist G ein Baum.
- d) Wenn G ein Baum ist, dann hat $G' = (V, E \cup e)$ für $e \notin E$ genau einen einfachen Kreis.
- e) Die Summe aller Knotengrade in G ist gleich die Anzahl aller Kanten m .
- f) Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad in G ist gerade.
- g) Wenn G ein vollständiger k -närer Baum ist ($k \geq 2$), so gilt $\text{diam}(G) \leq 2 \lceil \log_k n \rceil$.
- h) Es existiert kein solcher Graph G , in dem jeder Knoten zu jedem anderen mit einem Pfad der Länge 2 verbunden werden kann.
- i) Sei n hier gerade. Falls der Grad jedes Knotens von G mindestens $\frac{n}{2}$ ist, dann ist G zusammenhängend.

Aufgabe 3: Wasserbehälter (3+1+1 Punkte)

Wir haben drei Behälter mit einer Größe von 10 Litern, 7 Litern bzw. 4 Litern. Der 7-Liter- und der 4-Liter-Behälter sind voll mit Wasser befüllt, aber der 10-Liter-Behälter ist anfangs leer. Nur ein Vorgang ist zulässig: Man kann Wasser von einen Behälter in den anderen umgießen und stoppt erst, wenn der neu befüllte Behälter voll ist oder der andere leer ist. Wir möchten wissen, ob es eine Abfolge von Umfüllungen gibt, die genau 2 Liter im 7- oder 4-Liter-Behälter hinterlassen.

- a) Modellieren Sie diese Aufgabe als Graph-Problem. Geben Sie eine genaue Definition des Graphen an und stellen Sie die Frage auf, die für diesen Graphen gelöst werden muss.

- b) Welcher Algorithmus sollte für dieses Problem angewandt werden?
- c) Geben Sie eine Abfolge von Umfüllungen an, die das Problem löst.

Freiwillige Zusatzaufgabe 1 (2 Punkte) Eine Gruppe von n Personen fährt gemeinsam in den Urlaub. Dabei bezahlt häufig der eine für den anderen, sodass nach dem Urlaub jeder bei jedem Schulden (oder ein Guthaben) hat. Beweisen Sie, dass durch maximal $n - 1$ Banküberweisungen zwischen den Personen, wobei keine Person mehr als eine Überweisung tätigen soll, alle Schulden getilgt werden können.